شبیه‌سازی جریان آرام و درهم داخل کانال‌های واگرا با استفاده از روش ورتکس‌های تصادفی (RVM) و بررسی تأثیر زاویهٔ واگرایی و عدد رینولدز بر جریان برگشتی درون کانال *

بهروز ظفرمند [۱]   یاسر نوری [۲]

چکیده *این مقاله ارائهٔ نتایج حاصل از شبیه‌سازی عددی جریان‌های آرام و درهم درون کانال‌های واگرا می‌باشد که با استفاده از روش ورتکس‌های تصادفی (Random Vortex Method) صورت گرفته است. روش ورتکس‌های تصادفی (RVM) روشی است که معادلات ناویر-استوکس را به‌صورت تابعی از زمان حل می‌کند و بدون نیاز به شبکه‌بندی بر روی هندسه و هم‌چنین بدون نیاز به تعیین سرعت در تمام میدان سیال، سرعت در هر نقطه از کانال را تعیین می‌نماید. سرعت پتانسیل به‌عنوان شرط اولیه در تحلیل جریان به روش ورتکس‌های تصادفی است که در این مقاله با استفاده از تبدیل همدیس شوارتز-کریستوفل به‌دست آمده است. نتایج حاصل از این روش با کدنویسی به زبان برنامه‌نویسی Fortran صورت گرفته و با نتایج نرم‌افزار Fluent مقایسه شده است که نشان‌دهندهٔ تطابق بسیار خوبی می‌باشد. هم‌چنین با استفاده از روش ورتکس‌های تصادفی تأثیر زاویهٔ واگرایی کانال و نیز تأثیر عدد رینولدز بر جدایی جریان درون کانال‌های واگرا بررسی شده و نتایج بسیار مفیدی به‌دست آمده است.*

واژه‌های کلیدی ورتکس‌های تصادفی، معادلات ناویر-استوکس، سرعت پتانسیل، تبدیل همدیس شوارتز-کریستوفل، زاویهٔ واگرایی، عدد رینولدز.

Simulating of Laminar and Turbulent Flows Inside Diverging Channels with Random Vortex Method (RVM) and Investigating the Effects of the Angle of Divergence and the Reynolds Number on the Recirculating Flow Inside the Channels

B. Zafarmand   Y. Noori

Abstract *This paper presents the results of numerical simulations of the laminar and turbulent flows inside diverging channels using random vortex methods (RVM). Random Vortex Method is a mesh-free method which solves unsteady vorticity equation instead of solving Navier-stokes equations directly to determine the velocity field. In this paper, the velocity potential, which is used as the initial condition, is derived by the Schwarz-Christoffel mapping. A FORTRAN code is developed to solve the equations and good agreement is achieved by comparing the results with the CFD code of the FLUENT. Furthermore, the effects of the angle of divergence of the channel and the Reynolds number on the flow separation are investigated.*

Key Words Random Vortex, Navier-Stokes Equations, Potential Velocity, Schwarz-Christoffel Mapping, Reynolds Number

★تاریخ دریافت مقاله ۹۲/٤/۱۹ و تاریخ پذیرش آن ۹۲/۱۱/۲۷ می‌باشد.

(۱) استادیار، موسسه آموزشی پژوهشی صنعت آب و برق، مشهد.

(۲) نویسندهٔ مسئول، کارشناس ارشد، مهندسی مکانیک، دانشکدهٔ مهندسی، دانشگاه آزاد اسلامی واحد مشهد. noori.yaser@gmail.com

مقدمه و مروری بر تحقیقات گذشته

یکی از روش‌های موفق، دقیق و در عین حال جذاب در بررسی جریان لزج در رژیم‌های آرام و درهم که در گسترهٔ وسیعی از اعداد رینولدز مورد استفاده قرار می‌گیرد، روش ورتکس‌های تصادفی است که بر پایهٔ شبیه‌سازی جریان لزج درون اجسام مختلف، با استفاده از تئوری جریان پتانسیل و صفر نمودن سرعت مماسی روی دیواره (شرط عدم لغزش) توسط ورتکس‌ها و هم‌چنین صفر نمودن مؤلفهٔ عمودی سرعت توسط تصاویر ورتکس‌ها صورت می‌پذیرد.

همانند هر روش عددی، روش ورتکس‌های تصادفی نیز مزیت‌ها و معایبی دارد. از بین مزیت‌های فراوان این روش می‌توان به موارد زیر اشاره نمود:

۱- در این روش برای شبیه‌سازی جریان سیال، نیاز به شبکه بندی بر روی هندسهٔ مورد نظر نیست در حالی که روش‌های متداول CFD همواره نیازمند شبکه‌بندی دقیق بر روی هندسه می‌باشند. این روش را روش بدون مش (Meshless) نیز می‌خوانند [1].

۲- در این روش، به‌جای استفاده از متغیرهای اصلی نظیر فشار و سرعت، از ورتیسیته و معادلهٔ انتقال ورتیسیته (Vorticity Transport Equation) استفاده می‌شود و ازاین‌رو می‌توان حرکت سیال را بدون اطلاع از میدان سرعت یا فشار، شبیه‌سازی نمود.

۳- در این روش امکان بررسی جریان سیال در گسترهٔ وسیعی از اعداد رینولدز، اعم از رژیم‌های آرام و درهم میسر است.

٤- در این روش به مدل‌های شبیه‌سازی جریان درهم نظیر K-ζ و K-ω و استفاده از معادلات کمکی نیاز نمی‌باشد.

٥- از آن‌جایی که در این روش معادلهٔ انتقال ورتیسیته و حرکت ذرات با دیدگاه لاگرانژی صورت می‌گیرد، مشکلات مربوط به ترم‌های غیرخطی معادلات ناویر-استوکس از بین می‌رود و می‌توان معادلات حاکم را به‌صورت لحظه‌ای حل کرد.

٦- در این روش هیچ‌گونه ساده‌سازی در معادلات وجود ندارد.

۷- یکی از مشخصه‌های برجستهٔ این روش، حل معادلات تابع زمان است.

۸- از آن‌جایی که در این روش از دیدگاه لاگرانژی استفاده می‌شود، در مناطقی که گرادیان‌های سرعت بزرگ دارند، می‌توان توزیع سرعت را به‌سادگی به‌دست آورد.

۹- با این روش می‌توان مناطق بزرگ چرخشی را قابل مشاهده نمود.

علیرغم تمام مزیت‌های شمرده شدهٔ این روش می‌توان دست کم به دو مورد اشاره کرد که جزء معایب این روش است:

۱- به‌دلیل طبیعت لاگرانژی این روش، زمان محاسبه بسیار طولانی خواهد بود.

۲- این روش برای جریان‌های سه‌بعدی و جریان‌های محوری کاربرد ندارد.

روش عددی ورتکس‌های تصادفی برای حل معادلات حرکت دوبعدی و تابع زمان سیالات غیرقابل تراکم در جریان‌های آرام و درهم به خدمت گرفته می‌شود. اساس این روش مبتنی بر حل معادلهٔ ورتیسیته وابسته به زمان است که این معادله از تأثیر اپراتور کرل (Curl Operator) روی معادلات ناویر-استوکس و ادغام آن با معادلهٔ پیوستگی حاصل می‌شود [1].

شرط عدم لغزش یا صفر بودن سرعت نسبی روی دیواره در هر لحظه از زمان، به‌عنوان شرط مرزی حل معادلات جریان سیال می‌باشد. در روش ورتکس‌های تصادفی، به‌منظور صفر کردن مؤلفهٔ مماسی سرعت روی دیواره، تعدادی ورتکس با چرخش ثابت و معین تولید می‌گردد که حرکت این ورتکس‌ها با دیدگاه لاگرانژی (Lagrangian Description) و براساس دو مکانیزم جابه‌جایی (Convection) و پخش (Diffusion) صورت می‌گیرد [1].

حرکت هر ورتکس ناشی از سرعت پتانسیل سیال، به‌علاوه مجموع سرعت‌های لحظه‌ای القا شده توسط ورتکس‌های دیگر و هم‌چنین تصاویر آن‌ها در مرکز ورتکس مورد نظر می‌باشد. به همین ترتیب سرعت لحظه‌ای در هر نقطه از سیال نیز با استفاده از سرعت‌های لحظه‌ای القا شده توسط ورتکس‌ها، تصاویر آن‌ها و سرعت پتانسیل عبوری از آن نقطه به‌دست می‌آید.

حرکت ورتکس‌ها در تمام محیط اطراف خود و هم‌چنین دیواره، سرعت القایی ایجاد می‌نمایند. مؤلفهٔ عمودی سرعت القایی روی دیواره با استفاده از تصویر ورتکس‌ها با چرخش ثابت و معکوس صفر می‌گردد. این عمل در هر لحظه از زمان صورت می‌گیرد. در نهایت توزیع ورتیسیته، جریان سیال لزج را در حالت آرام و درهم با گذشت زمان شبیه‌سازی می‌نماید.

ارائهٔ روش ورتکس‌های تصادفی را به چورین [2] (Chorin) در سال ۱۹۷۳ نسبت می‌دهند که به‌منظور مدل کردن جریان درهم اطراف یک استوانه مطرح کرد. او این روش را در سال ۱۹۷۸ [3] به‌منظور وارد نمودن شرایط مرزی در محاسبات و تحلیل لایهٔ مرزی، اصلاح نمود و آن را روش ورتکس‌های تصادفی نام‌گذاری نمود. از این پس بود که روش ورتکس‌های تصادفی جای خود را به‌عنوان یک روش عددی برای حل جریان باز کرد. تحقیقاتی راجع به افزایش دقت و هم‌گرایی این روش توسط بیل (Beal) و مجدا (Majda) (سال ۱۹۸۱[4]) و توسط بنفاتو (Benfatto) و پولویرنتی (Pulvirenti) (سال ۱۹۸٤) [5] انجام گرفت. قونیم (Ghoniem) و کنت (Kenneth) (سال ۱۹۸٦) [6]، با استفاده از این روش، اختلاط لایه‌های مرزی داخل یک کانال را بررسی نمودند و در ناحیهٔ اختلاط، تنش‌های برشی را محاسبه کردند. این روش توسط چیر (Cheer) [7] (سال ۱۹۸۹) روی سیلندر دوار و در رینولدزهای ۳۰۰۰ و ۹۵۰۰ با حرکت ضربه‌ای به‌کار گرفته و کامل شد. گاگنون (Gagnon) و جیووانینی (Giovannini) (سال ۱۹۹۳) [1] با استفاده از این روش به شبیه‌سازی عددی و تجزیه و تحلیل فیزیکی جریان‌های چرخشی با رینولدز بالا در کانال با انبساط ناگهانی پرداختند.

در میان تحقیقات اخیر، می‌توان به کتاب منتشر شده توسط کاتت (Cottet) و کوموتسکاس (Koumoutskos) (سال ۲۰۰۰) [8] دربارهٔ روش ورتکس اشاره نمود. مرتضوی (Mortazavi) و جیووانینی (Giovannini) (سال ۲۰۰۱) [9] یک جت دوبعدی را در عدد رینولدز بالا به‌کمک ترکیبی از روش ورتکس‌های تصادفی و روش المان محدود مدل نموده‌اند. هم‌چنین می‌توان تحقیقات راماچاندران (Ramachandran) (سال ۲۰۰٤) [10] را در خصوص شبیه‌سازی جریان سیال در کانال با انبساط ناگهانی و نیز بر روی استوانه به روش ورتکس‌های تصادفی بیان کرد.

در دههٔ گذشته در ایران تحقیقات و مطالعات خوبی در زمینهٔ روش ورتکس‌های تصادفی صورت گرفته است. کرباس فروش (سال ۱۳۷۹) [۱۱] با استفاده از این روش، شبیه‌سازی جریان آرام و درهم داخل کانال با انبساط ناگهانی را بررسی نمود. نوری و شادمان (سال ۱۳۸۲) [۱۲] به تحلیل دینامیک میکروحباب‌ها حول استوانهٔ در جریان تراکم ناپذیر با استفاده از روش ورتکس‌های تصادفی پرداختند. سبزپوشانی (سال ۱۳۸۵) [۱۳] حل عددی جریان لزج اطراف ایرفویل را به‌همراه اسپویلر با استفاده از روش ورتکس‌های تصادفی و تبدیلات همدیس متوالی بیان نمود. ظفرمند و کهرم (سال ۱۳۸۷) [١٤] به محاسبهٔ تنش‌های رینولدز در جریان پشت (دنباله) و روی یک استوانه با مقطع مستطیلی با استفاده از روش ورتکس‌های تصادفی پرداختند. هم‌چنین میرمفیدی (سال ۱۳۸۷) [۱۵] شبیه‌سازی جریان لزج مغشوش در اطراف استوانه را با استفاده از الگوهای جریان پتانسیل، چشمه‌ها و چاه‌ها با استفاده از روش ورتکس‌های

تصادفی بیان نمود. قدیرزاده (سال ۱۳۸۸) [۱۶] جریان لزج مغشوش در اطراف ایرفویل بیضوی را با استفاده از روش ورتکس‌های تصادفی بررسی نمود. هم‌چنین ظفرمند و کهرم (سال ۱۳۸۸) [۱۷] به بررسی جریان توربولنس دوفازی (مایع-حباب) داخل یک کانال با اتصال T و محاسبهٔ نرخ جدایی فازها با استفاده از روش ورتکس‌های تصادفی پرداختند. تدینی (سال ۱۳۸۸) [۱۸] به بررسی میدان جریان آرام و درهم در داخل یک حفره با استفاده از روش ورتکس‌های تصادفی پرداخت. زابلی (سال ۱۳۸۹) [۱۹] شبیه‌سازی جریان درهم بر روی دو استوانه متوالی را با استفاده از روش ورتکس‌های تصادفی بیان نمود.

معادلات حاکم

همان‌طور که گفته شد اساس کار و معادلهٔ حاکم بر روش ورتکس‌های تصادفی، معادلهٔ انتقال ورتیسیته می‌باشد که این معادله از تأثیر اپراتور کرل روی معادلات ناویر- استوکس و ادغام آن با معادلهٔ تراکم‌ناپذیر پیوستگی حاصل می‌شود. آن‌چه که در این قسمت بیان می‌گردد، چگونگی یافتن معادلهٔ انتقال ورتیسیته می‌باشد.

معادلات حاکم بر جریان سیال نیوتنی و غیرقابل تراکم، معادلات بقای جرم و ناویر- استوکس می‌باشند (با صرف‌نظر از نیروهای جسمی). اگر در معادلات ناویر- استوکس در حالت دوبعدی، بردار سرعت $V=(u,v)$ توسط سرعت مرجع U_∞، بردار موقعیت $X=(x,y)$ توسط طول مرجع H، τ زمان توسط $\frac{H}{U_\infty}$ و P فشار توسط ρU_∞^2 بی‌بعد شوند، فرم بی‌بعد شدهٔ این رابطه به‌صورت زیر بیان خواهد شد [20]:

$$\frac{\partial V}{\partial \tau}+V.\nabla V=-\nabla P+\frac{1}{Re}\nabla^2 V \qquad (۱)$$

در رابطهٔ فوق $Re=\frac{\rho U_\infty H}{\mu}$ عدد رینولدز است که در آن μ لزجت دینامیکی می‌باشد. شرایط مرزی عبارتند از:

$$V=(0,0) \qquad \text{بر روی دیواره} \qquad (۲)$$

$$V=(1,0) \qquad \text{ورودی کانال} \qquad (۳)$$

ورتیسیتهٔ کمیتی برداری است که با بررسی میدان ورتیسیته می‌توان جریان سیال را به‌خوبی شبیه‌سازی نمود. بردار ورتیسیته به‌صورت زیر بیان می‌شود [20]:

$$\omega=\nabla\times V=\text{curl}\,V \qquad (٤)$$

در این رابطه V بردار سرعت سیال می‌باشد که از مؤلفه‌های u، v و w تشکیل شده است که به‌ترتیب سرعت در راستای x، y و z می‌باشند.

برای حالت دوبعدی بردار ورتیسیته به‌صورت زیر خواهد بود [1]:

$$\omega=\nabla\times V=(0,0,\omega)=\left(0,0,\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right) \qquad (٥)$$

با استفاده از روابط بردارها و مشتق مادی برای رابطهٔ (۱) و تأثیر اپراتور کرل روی این رابطه و با توجه به این که کرل هر کمیت اسکالر صفر است و هم‌چنین با استفاده از معادلهٔ بقای جرم سیال غیرقابل تراکم ($\nabla.V=0$)، در نهایت معادلهٔ انتقال ورتیسیتهٔ دوبعدی به‌صورت زیر به‌دست خواهد آمد:

$$\frac{\partial \omega}{\partial \tau}+V.\nabla\omega=\frac{1}{Re}\nabla^2\omega \qquad (٦)$$

که در این معادله ω بردار ورتیسیته، V بردار سرعت سیال و Re عدد رینولدز می‌باشد. آن‌چه که در این معادله بسیار مورد توجه و با اهمیت است عدم حضور فشار به‌عنوان مجهول در معادله می‌باشد؛ این موضوع بیان می‌کند که میدان‌های ورتیسیته و جریان

سیال بدون نیاز به میدان فشار و یافتن آن، قابل محاسبه می‌باشند.

در این روش، معادلات غیردائم جریان در گام‌های زمانی حل می‌شوند. هر گام زمانی به دو نیم‌گام تقسیم می‌شود که هر کدام ساختار خاص خود را دارا می‌باشند. نیم‌گام زمانی اول که اثرات لزجت در آن نادیده گرفته می‌شود به‌وسیلهٔ مکانیزم جابه‌جایی طی می‌گردد و سپس در نیم‌گام زمانی دوم اثرات لزجت به‌صورت حرکت تصادفی حباب‌های ورتکس توسط مکانیزم پخش تأثیر داده می‌شود که به همین علت به این روش، روش گرابه‌های تصادفی گفته می‌شود [8]. این دو مرحله در حل معادلهٔ انتقال ورتیسیته (رابطهٔ ٦) به‌ترتیب به‌صورت زیر بیان می‌گردند [1]:

$$\frac{\partial\omega}{\partial\tau}+V.\nabla\omega=0 \qquad (۷)$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial\tau}=\frac{1}{Re}\nabla^2\omega \qquad (۸)$$

حل کلی معادلهٔ انتقال ورتیسیته با جمع حل‌های روابط (۸ و ۷) به‌دست می‌آید.

رابطهٔ (۷) به‌وسیلهٔ جابه‌جایی لاگرانژی تعداد زیادی ورتکس (که در واقع توزیع ω هستند) حل می‌شود. این حل با کمک تعریف تابع جریان ψ و قانون بایوت- ساوارت (Biot-Savart) به‌صورت زیر است [1]:

$$V(X)=\int K(X-X')\omega(X')dX' \qquad (۹)$$

در رابطهٔ فوق $dX'=dxdy$ و K کرنل رابطهٔ پواسون تابع جریان می‌باشد که به‌صورت زیر بیان می‌شود [1]:

$$K(X)=K(x,y)=-\frac{1}{2\pi}\frac{(y,-x)}{r^2} \qquad (۱۰)$$

در رابطهٔ فوق $r^2=x^2+y^2$ می‌باشد. رابطهٔ (۹) سرعت را به توزیع ورتیسیته ربط می‌دهد. با استفاده از تئوری کلوین- هلمهولتز (Kelvin-Holmholtz Theory) می‌توان یک فرم لاگرانژی از رابطهٔ (۷) داشت [1]. بدین منظور اگر $\chi(X_0,\tau)$ موقعیت ذره‌ای باشد که در لحظهٔ τ از نقطهٔ X_0 می‌گذرد و $\omega(X_0)$ توزیع ورتیسیته در لحظه $\tau=0$ باشد، در این صورت رابطهٔ (۷) معادل است با:

$$\omega\left(\chi(X_0,\tau)\right)=\omega(X_0)=\omega(X_0,0) \qquad (۱۱)$$

χ در رابطهٔ فوق از حل معادلهٔ زیر به‌دست می‌آید [1]:

$$\frac{d\chi}{d\tau}=V\left(\chi(X,\tau)\right) \quad , \ \chi(X_0,0)=X_0 \qquad (۱۲)$$

این توصیف لاگرانژی معادلهٔ انتقال حرکت، مشکلات مربوط به عبارات غیرخطی معادلات حاکم یعنی معادلات ناویر- استوکس را برطرف می‌کند. رابطهٔ (۱۲) سیستمی متشکل از بی‌نهایت معادلهٔ دیفرانسیلی معمولی است. به‌منظور کاهش تعداد این معادلات دیفرانسیل به تعدادی محدود، میدان ورتیسیته به تعدادی المان‌های کوچک سطح و به‌منظور تشکیل المان‌های ورتکس تجزیه می‌شود. هر کدام از این المان‌ها یک چرخش (Circulation) ثابت و محدود Γ_{max} را منتقل می‌نمایند. مفهوم چرخش بر روی یک سطح بسته با رابطهٔ زیر بیان می‌شود [20]:

$$\Gamma=\oint V.dI \qquad (۱۳)$$

که dI بیان‌کنندهٔ یک المان جزء از سطح بسته است. سطح A مربوط به دیواره‌ها به N المان با سطح مقطع δA تقسیم می‌شود و چرخش هر المان با استفاده از تعریف اصلی چرخش از رابطهٔ زیر محاسبه می‌گردد [1]:

$$\Gamma_i = \int_{\delta A_i} \omega(x,y)\,dA \cong \omega(X_i)\,\delta A_i \qquad (۱٤)$$

به‌منظور حذف نقطهٔ منفرد مرکز هر ورتکس، توزیع ورتیسیته در هر المان بر اساس یک تابع هسته (Core Function) با شعاع محدود δ بیان می‌شود [1]. این تابع می‌تواند فرم‌های مختلفی داشته باشد به‌قسمی که نقطهٔ منفرد در مرکز ورتکس را از بین ببرد. طبق نظریهٔ چورین (Chorin) و برنارد (Bernard) [1]، با استفاده از تابع هسته، توزیع ورتیسیته به شکل زیر تقریب زده می‌شود:

$$\omega(x,y) = \sum_{i=1}^{N} \Gamma_i f_\delta(x,y) \qquad (۱۵)$$

که در رابطهٔ فوق f_δ همان تابع هسته و δ شعاع هر ورتکس است. تابع هسته تابع شعاعی و متقارن است. با جای‌گذاری رابطهٔ (۱۵) در رابطهٔ (۹)، سرعت القا شده توسط میدان ورتیسیته به‌صورت زیر به‌دست می‌آید [1]:

$$\begin{aligned} V(x,y) &= \sum_{i=1}^{N} \Gamma_i K_\delta(x-x', y-y') \\ &= \sum_{i=1}^{N} \Gamma_i K_\delta(X-X') \end{aligned} \qquad (۱٦)$$

که در رابطهٔ فوق داریم:

$$K_\delta(x,y) = -\frac{1}{2\pi}\frac{(y,-x)}{r^2} K\left(\frac{r}{\delta}\right) \qquad (۱۷)$$

و

$$K(r) = 2\pi \int_0^r r f(r)\,dr \qquad (۱۸)$$

نتیجه این‌که با استفاده از تابع هسته توزیع ورتیسیته در داخل المان ورتکس مشخص می‌شود و سرعت در مرکز هر ورتکس مقدار محدودی خواهد شد. تابع f اولین بار توسط چورین به‌صورت زیر پیشنهاد شده است و معمولاً به همین فرم انتخاب می‌شود [1]:

$$f(r) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi r} & ,r \le \delta \\ 0 & ,r > \delta \end{cases} \quad , \qquad K(r) = \begin{cases} r & ,r \le \delta \\ 1 & ,r > \delta \end{cases} \qquad (۱۹)$$

حال حرکت ورتکس‌ها توسط تعداد محدودی از معادلات دیفرانسیل و به‌صورت لاگرانژی صورت می‌گیرد:

$$\frac{dX_j}{d\tau} = \sum_{i=1}^{N} \Gamma_i K_\delta(X_j - X_i) \quad ,j = 1,\dots,N \qquad (۲۰)$$

با جای‌گزینی رابطهٔ (۱۷) در رابطهٔ (۲۰)، سرعت القا شده بر روی ورتکس jام به‌دست می‌آید. اگر N تعداد ورتکس‌ها، $w = u + iv$ سرعت مختلط و $z = x + iy$ موقعیت مختلط که $i = \sqrt{-1}$ باشد، سرعت القا شده از سوی ورتکس‌ها بر روی ورتکس *j*ام از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید [۱۷و۱٤,1-3,1-]:

$$\bar{w}(z_j) = \sum_{\substack{i=1 \\ i \ne j}}^{N} \frac{-i\Gamma_i |z_j - z_i|}{2\pi \max(|z_j - z_i|, \delta)} \frac{1}{z_j - z_i} \qquad (۲۱)$$

که در رابطهٔ فوق $\bar{w} = u - iv$ مزدوج سرعت مختلط w، δ شعاع و Γ_i سیرکولاسیون هر ورتکس می‌باشد. برای صفر کردن سرعت عمودی بر روی دیواره، از انتقال هم‌دیس شوارتز-کریستوفل استفاده می‌شود. این انتقال کانال و ناحیهٔ داخلی آن را که در صفحهٔ z قرار دارد به روی محور حقیقی و نیمهٔ بالایی صفحه انتقال *t* می‌نگارد. برای از بین بردن سرعت قائم القا شده توسط ورتکس‌ها از تصویر ورتکس استفاده می‌شود. اگر U_s سرعت مماسی بر روی دیواره باشد، سیرکولاسیون مورد نیاز برای از بین بردن این سرعت عبارت است از [1]:

$$\Gamma = -\oint U_s . ds \qquad (۲۲)$$

در رابطهٔ فوق s جهت مماس بر سطح دیواره است. بدین ترتیب ورتکس‌ها به خاطر صفر شدن سرعت لغزشی روی دیواره به‌وجود می‌آیند و توسط مکانیزم پخش از دیواره جدا و وارد جریان اصلی می‌شوند و در مرحلهٔ بعد توسط هر دو مکانیزم پخش و جابه‌جایی به حرکت خود ادامه می‌دهند.

دومین گام انتقال ورتیسیته (رابطهٔ ۸) با جابه‌جایی تصادفی ورتکس‌ها براساس یک متغیر تصادفی گوسی انجام می‌گیرد. حل یک‌بعدی رابطهٔ (۸) توسط تابع گرین به‌صورت زیر بیان می‌شود [1]:

$$Gr(x,\tau) = \left(\frac{Re}{4\pi\tau}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{Re}{4\tau}x^2\right) \qquad (۲۳)$$

که دقیقاً با تابع چگالی احتمال متغیر گوسی با متغیر تصادفی η، مقدار متوسط صفر و انحراف از معیار σ یکسان است [1]:

$$P(\eta,\sigma) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\eta^2\right) \qquad (۲٤)$$

با مقایسهٔ دو رابطهٔ اخیر می‌توان دریافت که این دو معادله کاملاً یکسانند اگر $\sigma = \sqrt{\frac{2\tau}{Re}}$ باشد. در حالت دوبعدی نیز همین حکم صادق است. بنابراین حل مرحلهٔ پخش انتقال ورتیسیته عبارتست از دو جابه‌جایی عمود بر هم که در واقع متغیرهای تصادفی با توزیع گوسی، مقدار متوسط صفر و انحراف از معیار $\sigma = \sqrt{\frac{2\Delta\tau}{Re}}$ هستند که $\Delta\tau$ گام زمانی می‌باشد [1].

انتقال کلی المان‌ای ورتکس در یک گام زمانی $\Delta\tau$، از جمع دو تغییر مکان حاصل از جابه‌جایی و پخش صورت می‌گیرد. بنابراین اگر $Z_j(\tau)$ موقعیت ورتکس jام در زمان τ باشد، موقعیت آن در زمان $\tau+\Delta\tau$ از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید [1]:

$$Z_j(\tau+\Delta\tau) = Z_j(\tau) + w_j\Delta\tau + \eta_j \qquad (۲۵)$$

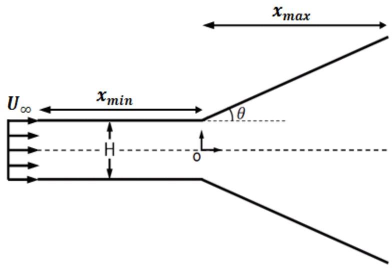
که در این رابطه $\eta_j = \eta_x + i\eta_y$ و η_x و η_y متغیرهای تصادفی گوسی هستند. w نیز از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید [١٤]:

$$\overline{w}(z_j) = \left[\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{N} w(t_j,t_i) - \sum_{i=1}^{N} w(t_j,\overline{t}_i) + w_p(t_j)\right] F(t_j) \qquad (۲٦)$$

در رابطهٔ فوق جملهٔ اول مجموعه سرعت‌های القا شده توسط کلیهٔ ورتکسهٔها بر روی ورتکس jام است که همان رابطهٔ (۲۱) می‌باشد، جملهٔ دوم مجموعه سرعت‌های القا شده توسط تصاویر کلیهٔ ورتکس‌ها بر روی ورتکس jام و جملهٔ سوم مقدار سرعت پتانسیل عبوری از نقطهٔ z_j می‌باشند. هم‌چنین t مختصات مختلط در صفحهٔ انتقال، $\overline{t}$ مزدوج t و $F(t_j)$ نیز تابع انتقال شوارتز-کریستوفل می‌باشند [21].

مشخصات هندسهٔ مورد نظر و یافتن سرعت پتانسیل

این مقاله ارائهٔ نتایج حاصل از شبیه‌سازی عددی جریان‌های آرام و درهم درون کانال‌های واگرا می‌باشد. شکل (۱) کانالی با مشخصات نشان داده شده می‌باشد. همان‌طور که از این شکل پیداست زاویهٔ واگرایی کانال θ در نظر گرفته شده است. سرعت جریان ورودی U_∞ و ارتفاع ورودی کانال H می‌باشد.



شکل ۱ ترسیمه‌ای از کانال واگرا با زاویهٔ θ

در جریان سیال داخلی، عدد رینولدز بر مبنای ارتفاع ورودی (H) محاسبه می‌شود بنابراین می‌توان عدد رینولدز را به‌صورت زیر نشان داد:

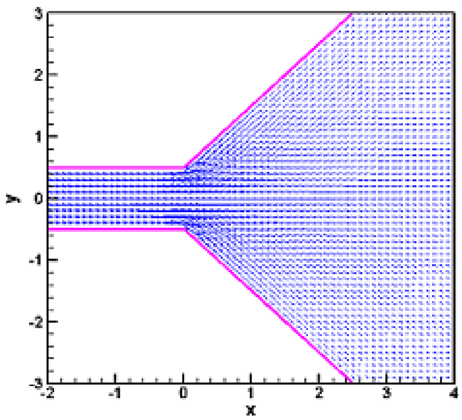
$$Re = \frac{\rho U_{\infty} H}{\mu} = \frac{U_{\infty} H}{\vartheta} \quad (۲۷)$$

در رابطهٔ فوق، ρ چگالی، μ لزجت دینامیکی و ϑ لزجت سینماتیکی سیال است. تمامی سرعت‌ها نسبت به سرعت ورودی (U_{∞}) و تمامی طول‌ها نسبت به طول ورودی (H) بی‌بعد شده‌اند.

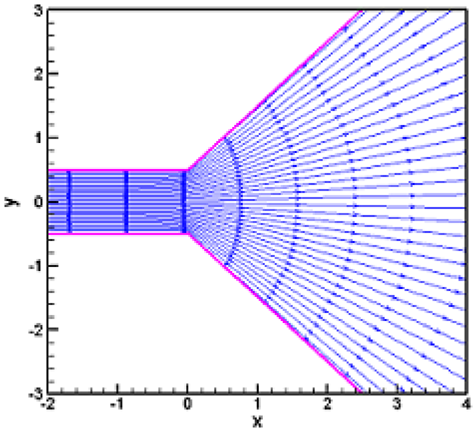
همان‌طور که پیش از این بیان گردید برای یافتن جریان پتانسیل به‌عنوان شرط اولیه، از تابع تبدیل هم‌دیس شوارتز-کریستوفل استفاده می‌شود که برای کانال واگرا با زاویهٔ θ به فرم کلی زیر به‌دست می‌آید [21]:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\sqrt[b]{1-t^2}}{\pi t} \quad (۲۸)$$

در رابطهٔ فوق با فرض واحد درجه برای زاویه θ و برای محدودهٔ $0<\theta<90$، $b = \frac{180}{\theta}$ خواهد بود. شکل (۲) بردار سرعت پتانسیل و شکل (۳) خطوط جریان پتانسیل را برای کانال با زاویهٔ ۴۵ درجه نشان می‌دهد.



شکل ۲ بردار سرعت پتانسیل برای کانال واگرا با زاویهٔ ۴۵ درجه



شکل ۳ خطوط جریان پتانسیل برای کانال واگرا با زاویهٔ ۴۵ درجه

نتایج

محاسبه با شرط اولیهٔ جریان پتانسیل درون تمام کانال آغاز و با ارضای شرط عدم لغزش بر روی دیواره‌ها با تولید ورتکس‌ها روی دیواره برای صفر کردن سرعت مماسی و استفاده از تصویر ورتکس‌ها برای صفر کردن سرعت نرمال، ورتکس‌ها به میدان جریان راه می‌یابند. حرکت ورتکس‌ها توسط هر دو مکانیزم جابه‌جایی و پخش صورت می‌پذیرد. ورتکس‌هایی که به‌واسطهٔ حرکتشان از فضای محاسباتی خارج می‌شوند در محاسبات تأثیری نخواهند داشت و کنار گذاشته می‌شوند. پس از آن‌که ورتکس‌ها تمام فضای محاسباتی را پر کردند تعداد آنها تقریباً ثابت می‌شود. یعنی $\frac{dN}{d\tau} \approx 0$ (N تعداد ورتکس‌ها درون فضای محاسباتی است). از این لحظه به بعد می‌توان سرعت در هر نقطه از جریان را از رابطه ای مشابه رابطهٔ (۲۶) (بدون محدودیت $i \neq j$ در جملهٔ اول) به‌دست آورد. چنین میدان سرعتی، لحظه‌ای است و برای به‌دست آوردن سرعت متوسط باید در چندین گام زمانی، محاسبه را تکرار و سپس متوسط‌گیری نمود.

برای حصول به یک نتیجهٔ دقیق بایستی تعداد

ورتکس‌ها در دامنهٔ فیزیکی زیاد باشد. به همین خاطر مقدار سیرکولاسیون اختصاص داده شده به هر ورتکس $\Gamma_m = 0.01$ در نظر گرفته شده است. هم‌چنین گام زمانی $\Delta\tau$ در این روش نقش اساسی دارد و هر چه مقدار آن کوچک‌تر باشد جواب دقیق‌تری خواهد بود. در این تحقیق $\Delta\tau = 0.1$ فرض شده است. البته این نکته را نیز نباید فراموش کرد که با کوچک‌تر فرض نمودن Γ_m و $\Delta\tau$، زمان اجرای برنامه طولانی‌تر خواهد شد.

در روش ورتکس‌های تصادفی می‌توان توزیع لحظه‌ای ورتکس‌ها را در هر لحظهٔ دلخواه مشاهده نمود. این توزیع که همان توزیع ورتیسیته است، حرکت جریان سیال را در هر لحظه از زمان به نمایش می‌گذارد که مشاهدهٔ پیوسته این توزیع، جذابیت خاص و بسیار جالبی را به‌همراه خواهد داشت.

در این تحقیق کانال‌های واگرا با زوایای ۳، ٦، ۱۰، ۲۰ و ٤۵ درجه برای اعداد رینولدز مختلف مورد بررسی قرار گرفته و نتایج حاصل از کد نوشته شده به‌دلیل نبودن نتایج آزمایشگاهی، با نتایج نرم‌افزار FLUENT مقایسه گردیده است. مشاهدهٔ نتایج حل عددی کد نوشته شده به روش ورتکس‌های تصادفی و نتایج نرم‌افزار FLUENT، تطابق بسیار خوب و قابل‌قبولی را بین این نتایج نشان می‌دهد.

شکل (٤) توزیع لحظه‌ای ورتکس‌ها را در سه زمان مختلف ۱۰۰، ۲۰۰ و ۳۰۰ گام زمانی، شکل (۵) بردار سرعت لحظه‌ای و خطوط جریان لحظه‌ای را در سه زمان مختلف ۱۰۰، ۲۰۰ و ۳۰۰ گام زمانی و شکل (٦) بردار سرعت متوسط و خطوط جریان مربوط را درون کانال واگرا با زاویهٔ ٤۵ درجه برای رینولدز ۵۰ نشان می‌دهند. متوسط‌گیری بر روی ۲۰۰ گام زمانی صورت گرفته است.

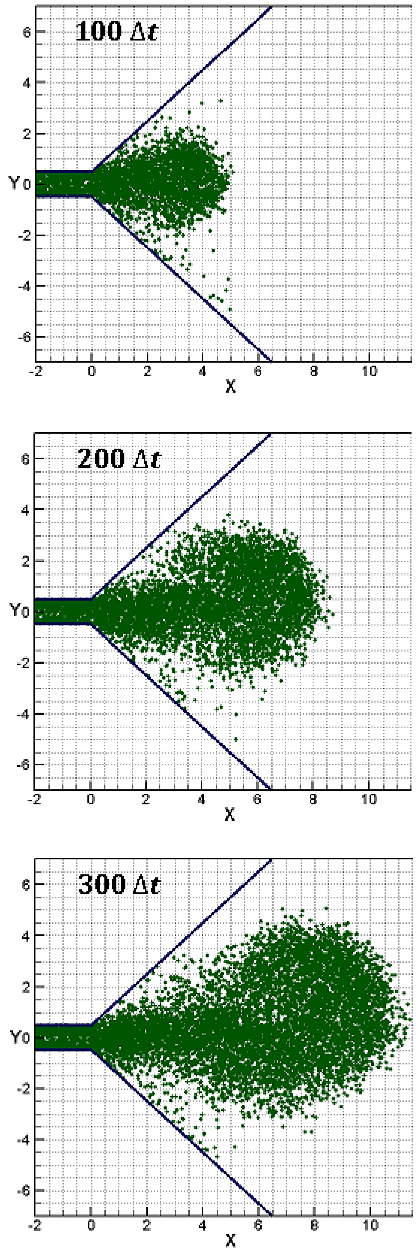
شکل (۷) توزیع لحظه‌ای ورتکس‌ها را در سه زمان مختلف ۱۰۰، ۲۰۰ و ۳۰۰ گام زمانی، شکل (۸) بردار سرعت لحظه‌ای و خطوط جریان لحظه‌ای را در سه زمان مختلف ۱۰۰، ۲۰۰ و ۳۰۰ گام زمانی و شکل (۹) بردار سرعت متوسط و خطوط جریان مربوط را درون کانال واگرا با زاویهٔ ٤۵ درجه برای رینولدز ۵۰۰۰۰ نشان می‌دهند. متوسط‌گیری بر روی ۵۰۰ گام زمانی صورت گرفته است.

با مشاهده و مقایسهٔ شکل‌های (۷ و ٤) می‌توان به این نتیجه رسید که برای محدودهٔ اعداد رینولدز کم (جریان آرام)، توزیع ورتکس‌ها آرام است و در زمان‌های مختلف تقریباً مشابه هستند. در مقابل برای اعداد رینولدز بالا (جریان درهم)، توزیع ورتکس‌ها در زمان‌های مختلف کاملاً غیرهمسان است و موقعیت ورتکس‌ها کاملاً به زمان بستگی خواهد داشت و از آن‌جایی که توزیع سرعت سیال نتیجهٔ حرکت این‌گونه ورتکس‌ها می‌باشد (القای سرعت توسط ورتکس‌ها) بار دیگر وابستگی سرعت‌ها و دیگر متغیرهای حرکت به زمان آشکار می‌شود.

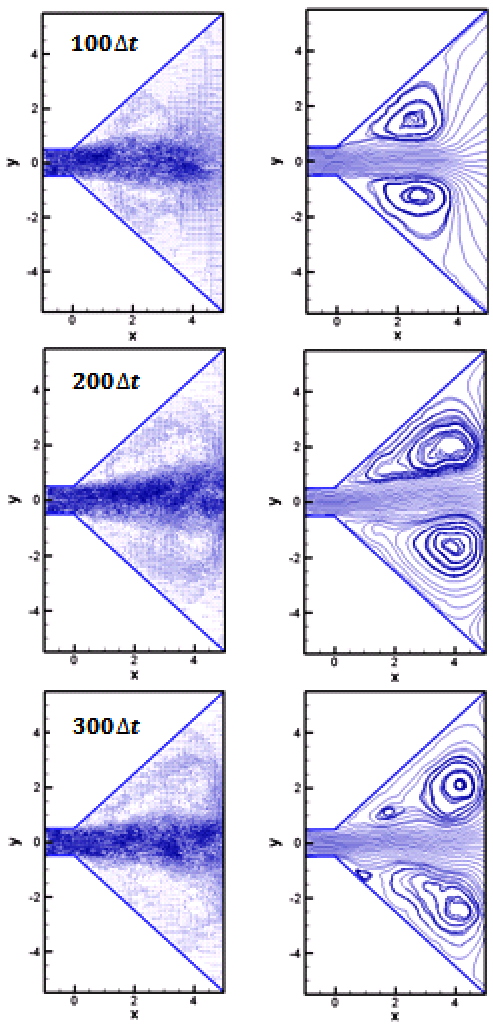
همان‌طور که می‌دانیم در جریان آرام توزیع سرعت لحظه‌ای و توزیع سرعت متوسط یکسان اند و تفاوتی ندارند اما در روش ورتکس‌های تصادفی، تعداد ورتکس‌ها در فضای محاسباتی در لحظات مختلف یکسان نیستند (اما از یک مرتبهٔ بزرگی هستند و به هم نزدیکند)، بنابراین در توزیع سرعت تفاوت وجود خواهد داشت (مشاهدهٔ شکل ٦ و مقایسهٔ آن با شکل ۵). هر چه تعداد ورتکس‌ها در محدودهٔ محاسباتی زیادتر باشد، به عبارت دیگر سیرکولاسیون اختصاصی داده شده به هر ورتکس را کوچک در نظر بگیریم، توزیع‌های لحظه‌ای و متوسط به یکدیگر نزدیک‌تر می‌شوند (البته این عمل باعث طولانی‌تر شدن زمان اجرای برنامه می‌شود). نکتهٔ جالب در این روش اینست که در جریان آرام نوسانات سرعت خیلی خیلی کوچکند. از طرفی برای جریان درهم بین توزیع سرعت لحظه‌ای و توزیع سرعت متوسط تفاوت چشم‌گیری وجود دارد که نشان دهندهٔ اینست که

نوسان‌های سـرعت کوچـک نیسـتند و قابـل ملاحظـه می‌باشند (مشاهدهٔ شکل ۹ و مقایسهٔ آن با شکل ۸).

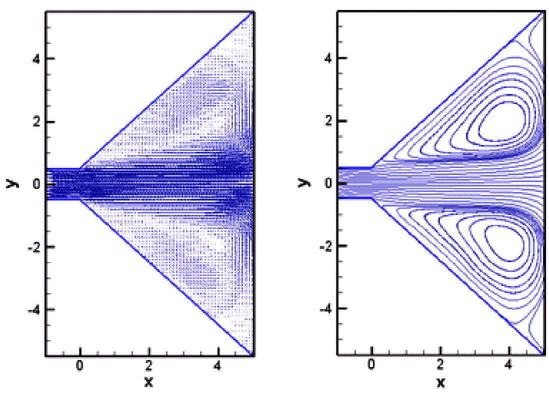
با یافتن سرعت افقی متوسط می‌توان پروفیل آن را بـرای حـالات مختلفـی از زوایـای واگرایـی و اعـداد رینولدز رسم نمود. شکل‌هـای (۱۳-۱۰) پروفیـل‌هـای سرعت افقی متوسط را در ٤ مقطع مختلف برای کانـال واگرا با زوایای مختلف و برای اعداد رینولدز متفـاوت نشان می‌دهند که با نتایج حاصـل از نـرم‌افـزار Fluent مقایسه شده‌اند. همان‌طور که از این شکل‌هـا پیداسـت نتایج حاصل از مدل با نتایج حاصل از نرم‌افزار Fluent تطابق بسیار خوب و قابل‌قبولی دارند.



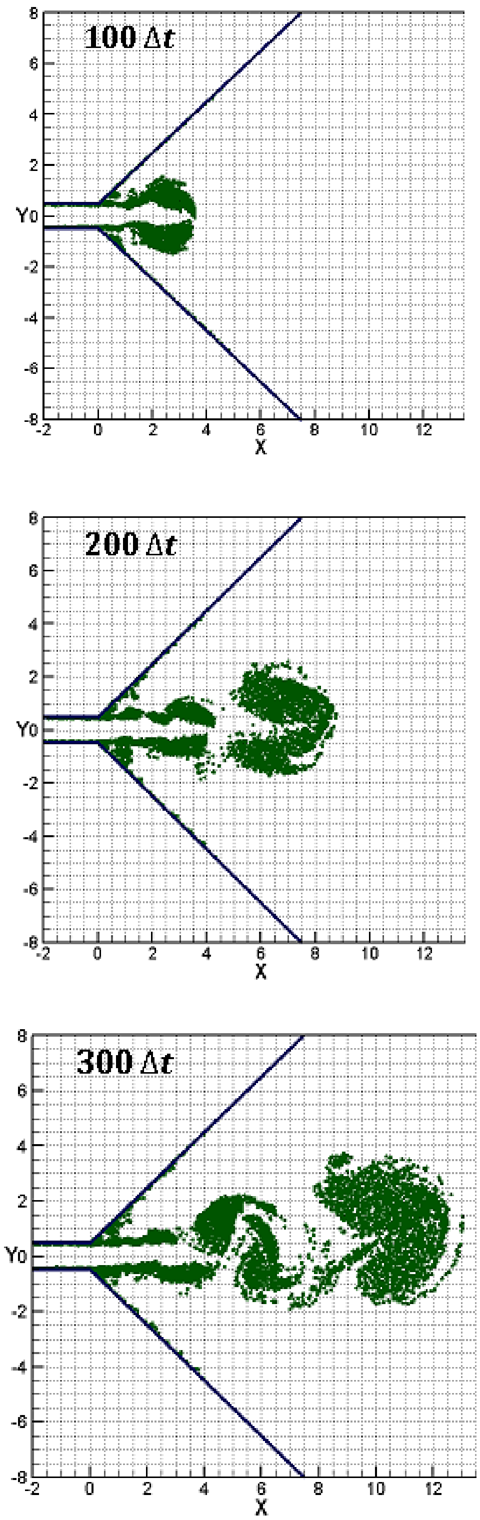
شکل ٤ توزیع لحظه‌ای ورتکس‌ها برای کانال واگرا با زاویه ٤۵ درجه برای Re=50 در سه زمان مختلف



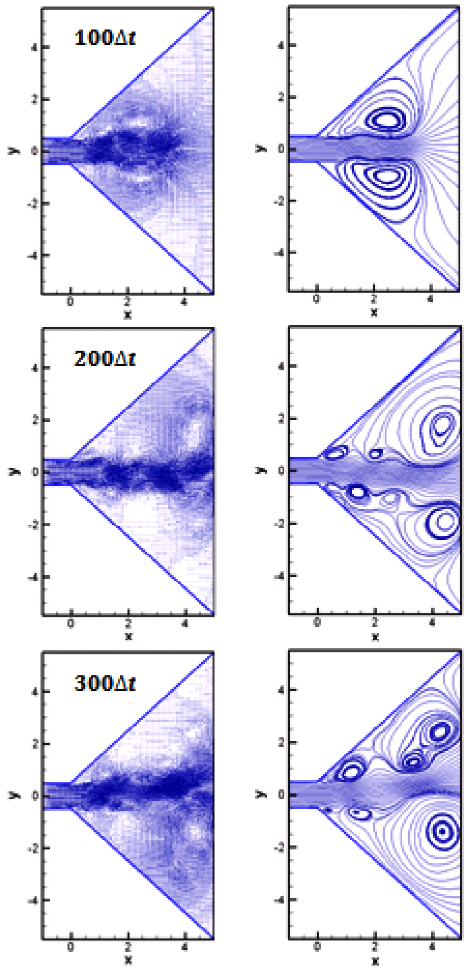
شکل ۵ بردار سرعت لحظه‌ای و خطوط جریان لحظه‌ای برای کانال واگرا با زاویهٔ ۴۵ درجه برای Re=50 در سه زمان مختلف



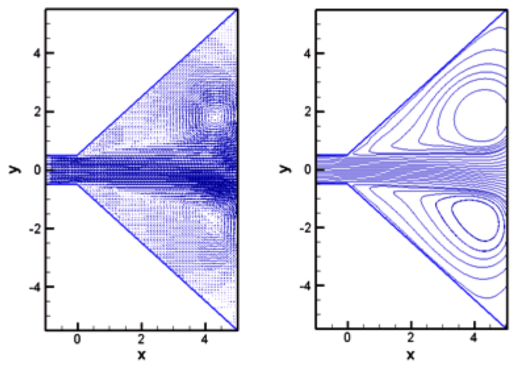
شکل ٦ بردار سرعت متوسط و خطوط جریان مربوط برای کانال واگرا با زاویهٔ ۴۵ درجه برای Re=50



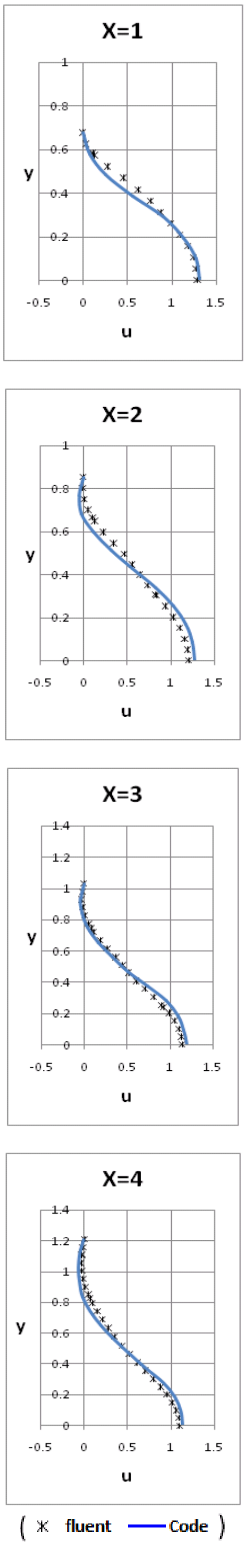
شکل ۷ توزیع لحظه‌ای ورتکس‌ها برای کانال واگرا با زاویهٔ ۴۵ درجه برای Re=50000 در سه زمان مختلف



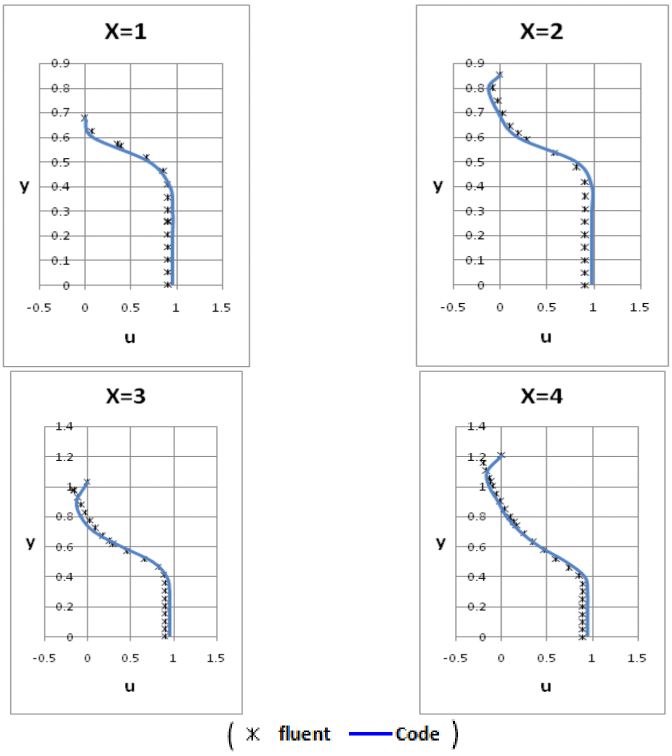
شکل ۸ بردار سرعت لحظه‌ای و خطوط جریان لحظه‌ای برای کانال واگرا با زاویهٔ ٤٥ درجه برای Re=50000 در سه زمان مختلف



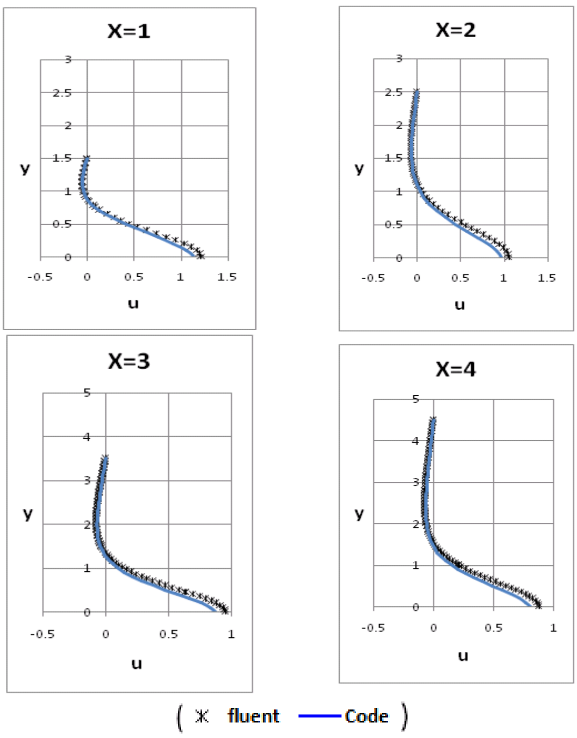
شکل ۹ بردار سرعت متوسط و خطوط جریان مربوط برای کانال واگرا با زاویهٔ ٤٥ درجه برای Re=50000



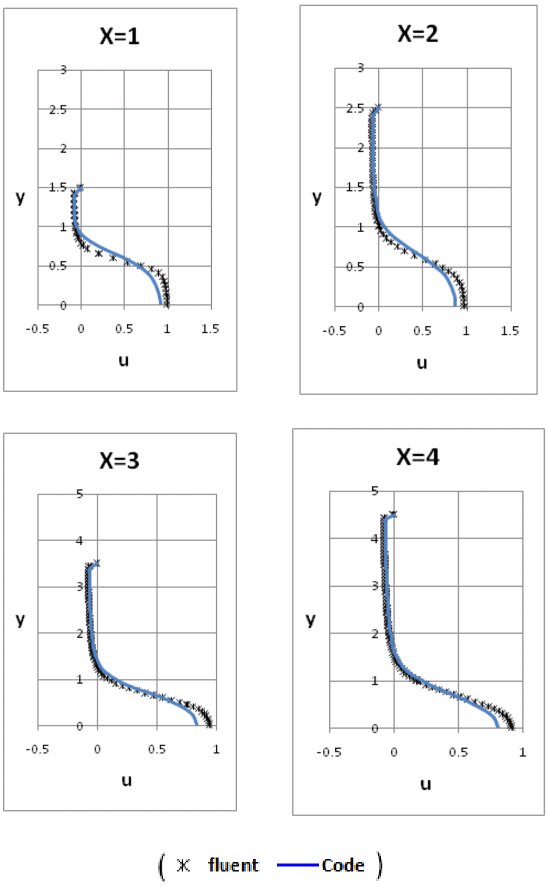
شکل ۱۰ پروفیل سرعت افقی متوسط در مقاطع مختلف درون کانال واگرا با زاویهٔ ۱۰ درجه برای Re=250 و مقایسه آن با نتایج نرم‌افزار Fluent



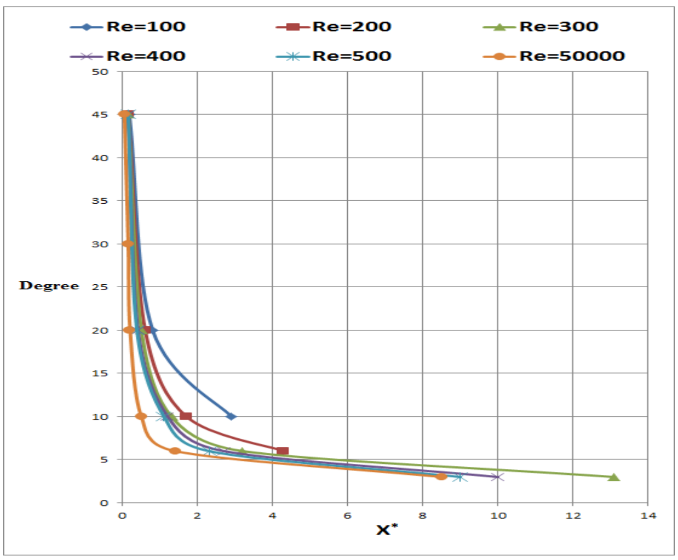
شکل ۱۱ پروفیل سرعت افقی متوسط در مقاطع مختلف درون کانال واگرا با زاویهٔ ۱۰ درجه
برای Re=50000 و مقایسه آن با نتایج نرم افزار Fluent



شکل ۱۲ پروفیل سرعت افقی متوسط در مقاطع مختلف درون کانال واگرا با زاویهٔ ۴۵ درجه
برای Re=50 و مقایسه آن با نتایج نرم افزار Fluent



شکل ۱۳ پروفیل سرعت افقی متوسط در مقاطع مختلف درون کانال واگرا با زاویهٔ ٤٥ درجه
برای Re=50000 و مقایسه آن با نتایج نرم افزار Fluent



شکل ١٤ بررسی محل جدایی جریان به‌ازای زوایای مختلف واگرایی کانال
و هم‌چنین به‌ازای اعداد رینولدز متفاوت درون کانال‌های واگرا

در این تحقیق تأثیر زاویهٔ واگرایی و عدد رینولدز بر جدایی جریان درون کانال‌های واگرا بررسی شده و نتایج بسیار ارزشمندی به‌دست آمده است که این نتایج را می‌توان در نمودار شکل (١٤) مشاهده نمود.

نتیجه‌گیری و جمع‌بندی

طبیعت وابسته به زمان بودن جریان درهم، مستلزم انتخاب یک مدل ریاضی وابسته به زمان برای این نوع جریان می‌باشد که در این‌جا از روش ورتکس‌های تصادفی استفاده شده است. این روش مبتنی بر مفاهیم فیزیکی جریان سیال می‌باشد. روش ورتکس‌های تصادفی (RVM) می‌تواند با دقت و قدرت قابل‌ملاحظه‌ای جریان سیال در رژیم‌های مختلف را شبیه‌سازی نماید. در این روش جریان سیال پیرامون هندسه‌های مختلف به‌صورت لحظه‌ای و وابسته به زمان و بدون هیچ ساده‌سازی در معادلات حاکم شبیه‌سازی می‌شود.

پارامتر کلیدی در این مدل، عدد رینولدز است. به عبارت دیگر برای هر عدد رینولدز دل‌خواه کد نوشته شده می‌تواند پاسخ لازم را بدهد. عدد رینولدز بحرانی را نیز می‌توان با اجرای برنامه به‌ازای رینولدزهای مختلف به‌دست آورد. معیار آرام یا درهم بودن جریان، نوسانات سرعت (تنش‌های رینولدز) می‌باشد. در جریان آرام تنش‌های رینولدز ناچیز است و به سمت صفر میل می‌کند اما در رینولدزهای بالا این نوسانات مقدار دارند و کوچک نیستند. البته در این مقاله به محاسبات مربوط از این دست پرداخته نشده است و نتایج فقط براساس مقدار عدد رینولدز استخراج شده‌اند.

همان‌طور که ملاحظه گردید جریان درون کانال‌های واگرا با زوایا و اعداد رینولدز مختلف بررسی و سرعت‌های لحظه‌ای و متوسط محاسبه گردیدند. موفقیت و صحت برنامهٔ نوشته شده برای شبیه‌سازی جریان سیال درون کانال‌های واگرا با زوایای مختلف به روش ورتکس‌های تصادفی، به‌وسیلهٔ محاسبهٔ سرعت متوسط سیال درون کانال مورد نظر و مقایسهٔ آن با نتایج حاصل از نرم‌افزار FLUENT مورد تأیید قرار گرفت. همان‌طور که ملاحظه گردید این مقایسه نشان‌دهندهٔ انطباق بسیار خوب و قابل‌قبول نتایج برنامهٔ نوشته شده به روش ورتکس‌های تصادفی با نتایج حاصل از نرم‌افزار FLUENT می‌باشد. هم‌چنین محاسبهٔ خطوط جریان و رسم آن‌ها، مناطق بزرگ چرخشی سیال را به‌راحتی قابل‌مشاهده می‌نماید.

در این تحقیق نمایشی از تولید ورتکس‌ها و توزیع ورتیسیته ارائه گردید که به جرأت می‌توان گفت تنها روشی که توزیع ورتیسیتهٔ سیال را با این قدرت و زیبایی شبیه‌سازی می‌کند، روش ورتکس‌های تصادفی است. در این روش حرکت ورتکس‌های تولید شده به‌صورت لحظه‌ای در زمان‌های مختلف به‌خوبی به تصویر کشیده شده است. برای جریان‌های آرام، حرکت ورتکس‌ها در زمان‌های مختلف از لحاظ توزیع مشابه هم خواهد بود و تفاوت چندانی نخواهد داشت. از طرفی برای جریان‌های درهم، حرکت ورتکس‌ها در زمان‌های مختلف کاملاً غیرهمسان خواهد بود و موقعیت ورتکس‌ها کاملا به زمان بستگی خواهد داشت و از آن‌جایی که توزیع سرعت سیال نتیجه حرکت این‌گونه ورتکس‌ها است (القای سرعت توسط ورتکس‌ها)، بار دیگر وابستگی سرعت‌ها و دیگر متغیرهای حرکت به زمان آشکار می‌شود.

علاوه بر نتایج فوق در این تحقیق تأثیر زاویهٔ واگرایی و عدد رینولدز بر جدایی جریان درون کانال‌های واگرا بررسی شد و نتایج به‌دست آمده از آن به‌صورت نمودار مفیدی ارائه گردید (شکل ١٤). این نمودار به‌ازای زاویهٔ واگرایی و عدد رینولدز، محل شروع جدایی جریان را در جهت x به ما نشان می‌دهد

که به‌نوبهٔ خود از اهمیت بسزایی برخوردار است. محل جدایی جریان با مشاهدهٔ بردارهای سرعت متوسط برای کانال با زوایا و اعداد رینولدز مختلف تعیین می‌شود. برای یک کانال با زاویهٔ مشخص و برای یک عدد رینولدز معین، زمانی که سرعت در نزدیک‌ترین گره به دیواره به صفر می‌رسد مختصات آن را مشخص می‌کنیم. از این نمودار می‌توان به این نتیجه رسید که در یک زاویه مشخص برای واگرایی کانال با افزایش عدد رینولدز، محل جدایی جریان عقب‌تر می‌آید یا به عبارت دیگر جدایی جریان در مکان نزدیک‌تری نسبت به مبدأ مختصات (نقطهٔ o شکل ۱) رخ می‌دهد. نتیجهٔ اخیر برای حالتی که عدد رینولدز ثابت باشد و زاویه تغییر کند نیز صادق است؛ به این ترتیب که به‌ازای یک عدد رینولدز مشخص با افزایش زاویهٔ واگرایی، جدایی جریان در مکان نزدیک‌تری نسبت به مبدأ مختصات (نقطهٔ o شکل ۱) رخ می‌دهد.

از آن‌جایی که در این روش در هر گام زمانی، توزیع سرعت لحظه‌ای محاسبه می‌شود، از این روش برای جریان‌های دوفازی مانند حرکت حباب‌ها در یک میدان سیال می‌توان استفاده نمود. برای محاسبه مسیر حرکت هر حباب باید سرعت لحظه‌ای و مشتقات سرعت لحظه‌ای جریان مایع در نقطهٔ حضور حباب معلوم باشد که با این روش به‌آسانی میسر خواهد بود.

فهرست علایم

علایم انگلیسی

المان سطح	dA
المان جزء سطح بسته	dI
بردار موقعیت المان سیال	dr
مشتق کلی	D
تابع هسته	f_δ
ارتفاع ورودی کانال	H
شمارنده	i
شمارنده	j
روش حل عددی	$k-\varepsilon$
روش حل عددی	$k-\omega$
کرنل رابطهٔ پواسون	K
تعداد کل ورتکس‌ها درون میدان فیزیکی	N
فشار	P
دبی ورودی کانال	Q_{in}
بردار طول	r
عدد رینولدز	Re
زمان	τ
متغیر مختلط	t
سرعت در جهت بردار x	u
سرعت جریان بالادست (ورودی کانال)	U_∞
سرعت در جهت بردار y	v
بردار سرعت	$V=(u,v)$
سرعت در جهت بردار z	w
سرعت مختلط	W
راستای محور مختصات	x
بردار مکان	$X=(x,y)$
راستای محور مختصات	y
متغیر مختلط	z
راستای محور مختصات	z
مختصات ورتکس j ام در لحظهٔ τ	$Z_j(\tau)$

علایم یونانی

قدرت چرخش ورتکس j ام	Γ_j
بیشترین قدرت چرخش ورتکس	Γ_{max}
شعاع ورتکس در صفحهٔ مختلط z	δ
تغییرات- لاپلاسین ($\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$)	Δ
تغییرات زمان	$\Delta\tau$
متغیر تصادفی	η
زاویه	θ

لزجت دینامیکی	μ	تابع جریان	ψ
لزجت سینماتیکی	ϑ	بردار ورتیسیته	ω
ثابت حقیقی	π	ورتیسیته در زمان $t=0$	ω_0
چگالی	ρ	دیفرانسیل جزیی	∂
انحراف معیار	σ	اپراتور دل	∇
موقعیت ذره	χ		

مراجع

1. Gagnon, Y. and Giovannini, A., "Numerical simulation and physical analysis of high Reynolds number recirculating flows behind sudden expansions", Journal of Physics Fluids, Vol. 5, pp. 2377-2389, (1993).
2. Chorin, A.J., "Numerical study of slightly viscous flow", Journal of Fluid Mechanic, Vol. 57, pp. 785-796, (1973).
3. Chorin, A.J., "Vortex sheet approximation of boundary layers", Journal of Computational Physics, Vol. 27, pp. 428-442, (1978).
4. Beal, J.T., Majda, A., "Rates of convergence for viscous splitting of navier stokes equation", Journal of Mathematics Computation, Vol. 37, pp. 243-259, (1981).
5. Benfatto, G., Pulvirenti, M., "Convergence of vorticity near the boundary in planar Navier-Stokes flows", Communications in Mathematical Physics, Vol. 96, pp. 59-95, (1984).
6. Ghoniem, A.F., Kenneth, K.N., "Numerical study of the dynamics of a forced shear layer", Journal of Physics Fluids, Vol. 30, pp. 706-721, (1986).
7. Cheer, A.Y., "Unsteady separated wake behind an impulsively started cylinder in slightly viscous fluid", Journal of Fluid Mechanic, Vol. 201, pp. 458-505, (1989).
8. Cottet, G.H., Koumoutsakos, P., "Vortex Methods (theory and practice)", ISBN -13: 978-0521621861, (2000).
9. Mortazavi, I., Giovannini, A., "The simulation of vortex dynamics downstream of plate separator using a vortex-finite element method", Journal of Fluid Dynamics, Vol. 5, pp. 41-58, (2001).
10. Ramachandran, P., "Development and study of high resolution two dimensional random vortex method", Technical Report AE:CFL:TR:2004:1, IIT-Madras, Indian Institute of Technology. IIT-Madras, Chennai, INDIA-600 036, (2004).

۱۱. کرباس فروش، محمدرضا، "شبیه‌سازی جریان آرام و درهم در داخل یک کانال با انبساط ناگهانی با استفاده از روش ورتکس‌های تصادفی، پایان نامه کارشناسی ارشد"، دانشکده فنی و مهندسی دانشگاه فردوسی مشهد، (۱۳۷۹).

۱۲. نوری، نوروز محمد، شادمان، مهرداد، "تحلیل دینامیک حرکت میکروحباب حول استوانه دوار در جریان تراکم ناپذیر با استفاده از روش ورتکس‌های تصادفی"، یازدهمین کنفرانس سالانه و هفتمین کنفرانس بین المللی مهندسی مکانیک، دانشگاه فردوسی مشهد، (اردیبهشت ۱۳۸۲).

۱۳. سبزپوشانی، مجید، "حل عددی جریان لزج اطراف ایرفویل به همراه اسپویلر با روش ورتکس‌های تصادفی و تبدیلات همدیس متوالی"، پایان نامه کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی مکانیک دانشگاه تربیت مدرس تهران، (۱۳۸۵).

۱٤. ظفرمند، بهروز، کهرم، محسن، "محاسبه تنش‌های رینولدز در جریان پشت (دنباله) و روی یک استوانه با مقطع مستطیلی با استفاده از روش ورتکس‌های تصادفی"، یازدهمین کنفرانس دینامیک شاره ها، دانشگاه صنعتی خواجه نصیر طوسی تهران، (۹-۷ خرداد ۱۳۸۷).

۱۵. میرمفیدی، محسن، "شبیه‌سازی جریان مغشوش در اطراف استوانه با استفاده از الگوهای جریان پتانسیل و چشمه‌ها و چاه‌ها (روش ورتکس‌های تصادفی)"، پایان نامه کارشناسی ارشد، دانشکده فنی و مهندسی دانشگاه آزاد اسلامی واحد مشهد، (۱۳۸۷).

۱٦. قدیرزاده، نادر، "شبیه‌سازی جریان لزج مغشوش در اطراف ایرفویل (بیضوی) با استفاده از الگوهای جریان پتانسیل و چشمه‌ها و چاه‌ها (روش ورتکس‌های تصادفی)"، پایان نامه کارشناسی ارشد، دانشکدهٔ فنی و مهندسی دانشگاه آزاد اسلامی واحد مشهد، (۱۳۸۸).

۱۷. ظفرمند، بهروز، کهرم، محسن، "بررسی جریان توربولنس دوفازی (مایع-حباب) در داخل یک کانال با اتصال T و محاسبهٔ نرخ جدایی فازها با استفاده از روش ورتکس‌های تصادفی"، دوازدهمین کنفرانس دینامیک شاره ها، دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل، (۷-۵ خرداد ۱۳۸۸).

۱۸. تدینی، عیسی، "شبیه‌سازی میدان جریان آرام و درهم در داخل یک حفره با روش المان‌های تصادفی"، پایان نامه کارشناسی ارشد، دانشکدهٔ فنی و مهندسی دانشگاه آزاد اسلامی واحد مشهد، (۱۳۸۸).

۱۹. زابلی، مهرداد، " شبیه‌سازی جریان درهم بر روی دو استوانهٔ متوالی با استفاده از روش ورتکس‌های تصادفی"، پایان نامهٔ کارشناسی ارشد، دانشکده فنی و مهندسی دانشگاه آزاد اسلامی واحد مشهد، (۱۳۸۹).

20. Streeter, V.L., Wylie, E.B. and Bedford, K.W., "Fluid Mechanics", 9th ed., WCB/McGraw Hill, (1997).

21. Nehari, Z., "Conformal Mapping", McGraw-Hill, New York, (1952).